1.1 — Le champ électrique $\vec{E}$ dérive d'un potentiel U(r) : $\vec{E} = -\vec{\nabla} U$, soit encore, en symétrie sphérique :

$$\vec{E} = -\frac{dU}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$$

où U(r) est le potentiel créé par le noyau au point r.

L'énergie potentielle de l'électron s'écrit : $V(r) = -e\,U(r)$

d'où :
$$\vec{E} = \frac{1}{e}\frac{dV}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$$

1.2 — L'énergie d'interaction électron-proton est donnée par :

$$V = \frac{-q^2}{r} \qquad \text{avec :} \quad q^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

On déduit : $\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{q^2}{r^2}$ d'où : $\vec{E} = \dfrac{q^2}{e\,r^3}\vec{r}$

Le champ magnétique créé par le mouvement de l'électron devient :

$$\vec{B} = -\frac{q^2}{c^2 e\, r^3}\vec{v} \wedge \vec{r}$$

On utilise alors la définition du moment cinétique : $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$;

On obtient : $\vec{B} = \dfrac{q^2}{m\,c^2 e\, r^3}\vec{L}$

En notant que : $\vec{\mu}_s = -g_s\dfrac{e}{2m}\vec{S}$

on trouve le hamiltonien d'interaction : $H_I = g_s\dfrac{q^2}{2\,m^2\,c^2\,r^3}\vec{L}\cdot\vec{S}$

2.1 — On écrit le moment angulaire total : $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

En élevant au carré cette expression, on a : $\vec{L} \cdot \vec{S} = (J^2 - L^2 - S^2)/2$

d'où : $H_I = f(r)\left(J^2 - L^2 - S^2\right)$

avec : $f(r) = g_s \dfrac{q^2}{4\,m^2\,c^2\,r^3}$

2.2 — Equations aux valeurs propres (exercice 9.8) :

$$J^2\,\psi = \hbar^2\, j\,(j+1)\,\psi$$
$$L^2\,\psi = \hbar^2\, \ell\,(\ell+1)\,\psi$$
$$S^2\,\psi = \hbar^2\, s\,(s+1)\,\psi$$

Pour l'atome d'hydrogène, on a : $0 \leq \ell \leq n-1$

avec : $$\left|\ell - \frac{1}{2}\right| \leq j \leq \ell + \frac{1}{2}$$
$$-j \leq m_j \leq +j$$

3 — On remplace H_I dans l'expression de ΔE_I :

$$\Delta E_I = f(r) \int_V \psi^*_{\ell' s' j' m'_j}\,(J^2 - L^2 - S^2)\,\psi_{\ell s j m_j}\,d\tau$$

En utilisant les équations aux valeurs propres (actions de J^2, L^2, S^2 sur les fonctions propres $\psi_{\ell s j m_j}$) et les conditions de normalisation, on obtient :

$$\Delta E_I = f(r)\hbar^2\left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)\right]\delta_{\ell'\ell}\,\delta_{j'j}\,\delta_{m'_j m_j}$$

puisque, pour l'atome d'hydrogène il n'y a qu'un seul électron ($s' = s = 1/2$).

4.1— Pour le premier niveau d'énergie, on a :

$$n = 1 \;;\; 0 \leq \ell \leq n-1 \longrightarrow \ell = 0 \;;\; s = 1/2$$
$$\left|\ell - \frac{1}{2}\right| \leq j \leq \ell + \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad j = \frac{1}{2}$$

On trouve, compte tenu des nombres ℓ, s, j calculés pour ce niveau :

$$j\,(j+1) - \ell(\ell+1) - s\,(s+1) = 0$$

d'où : $$\Delta E_I\,(1\,s) = 0$$

4.2 — Pour le deuxième niveau d'énergie :

$$n = 2 \;;\; 0 \leq \ell \leq n-1 \longrightarrow \ell = 0, 1 \;;\; s = 1/2$$
$$\left|\ell - \frac{1}{2}\right| \leq j \leq \ell + \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad j = \frac{1}{2} \quad \text{pour } \ell = 0$$
$$\rightarrow j = \frac{1}{2}\,,\,\frac{3}{2} \quad \text{pour } \ell = 1$$

Pour l'état s ($\ell = 0$), on a :

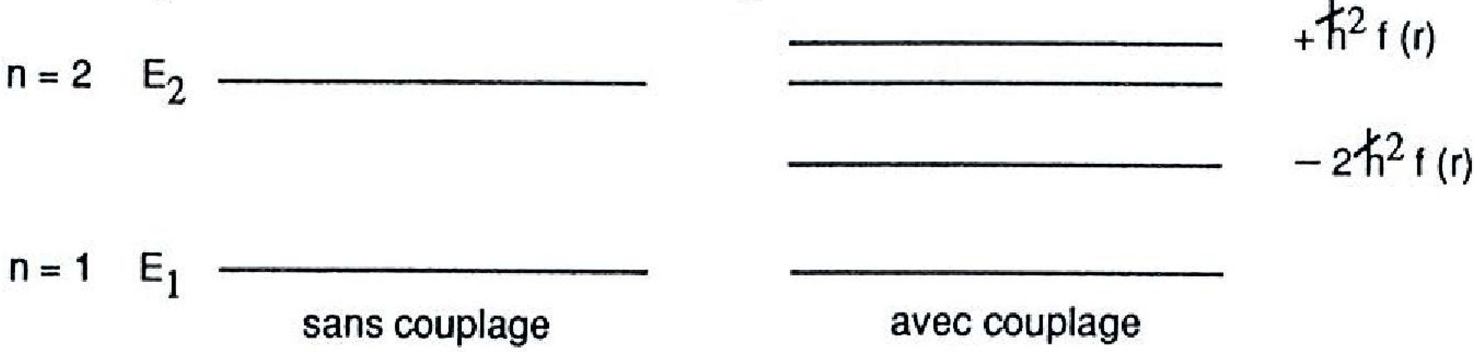
$$j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1) = 0$$

d'où : $\Delta E_I(2\,s) = 0$.
Pour l'état p ($\ell = 1$), on a :

$$j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1) = -2 \qquad \text{si } j = 1/2$$
$$= 1 \qquad \text{si } j = 3/2$$

d'où : $\Delta E_I\left(2\,p_{\frac{1}{2}}\right) = -2\hbar^2 f(r)$ $\qquad \Delta E_I\left(2\,p_{\frac{3}{2}}\right) = \hbar^2 f(r)$

4.3 — Représentation des niveaux d'énergie :



Dégénérescence sans couplage :

n quelconque	$g_n = 2\,n^2$
$n = 1$	$g_1 = 2$
$n = 2$	$g_2 = 8$

Dégénérescence avec couplage : $-j \leq m_j \leq +j$

$n = 1$ $\qquad \Delta E_I(1\,s) = 0 \longrightarrow g_1 = 2$

$n = 2$ $\qquad \Delta E_I(2\,s) = 0 \longrightarrow g_2(2\,s) = 2$

car $m_j = -1/2, +1/2$.

$$\Delta E_I\left(2\,p_{\frac{1}{2}}\right) = -2\,\hbar^2 f(r) \rightarrow g_2\left(2\,p_{\frac{1}{2}}\right) = 2$$

car $m_j = -1/2, +1/2$.

$$\Delta E_I\left(2\,p_{\frac{3}{2}}\right) = \hbar^2 f(r) \rightarrow g_2\left(2\,p_{\frac{3}{2}}\right) = 4$$

car $m_j = -3/2, -1/2, +1/2, +3/2$.

Le couplage spin-orbite ne lève pas la dégénérescence du niveau $n = 1$. Pour le niveau $n = 2$, la dégénérescence est partiellement levée.